অধ্যায় ০৩ জটিল সংখ্যা

➢ HSC বোর্ড পরীক্ষার জন্য এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ টাইপসমূহ:

গুরুত্ব	টাইপ	HSC পরীক্ষায় যে বছর প্রশ্ন এসেছে	
		MCQ	CQ
✪✪✪	**Q. Type-01: A+iB** আকারে প্রকাশ	RB’22, 19; SB’22; BB’19; CB’22; All.B’18	RB’22; CB’19; Din.B’22
✪✪✪	**Q. Type-02:** জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট সংক্রান্ত সমস্যা	DB’22; RB’17; Ctg.B’22, 17; SB’19; BB’17; JB’19; CB’22, 17; Din.B’22; MB’22; All.B’18	RB’17; Ctg.B’22; SB’17; BB’22; CB’22, 19, 17; Din.B’19
✪	**Q. Type-03:** জটিল সংখ্যার পোলার প্রতিরূপ সংক্রান্ত	CB’22	
✪✪✪	**Q. Type-04:** মূল নির্ণয় সংক্রান্ত	DB’22; BB’22; CB’19; Din.B’19, 17	RB’22, 19; Ctg.B’22, 19; BB’22; JB’22
✪✪	**Q. Type-05: i** এর ঘাতের মান নির্ণয় এবং ধারা সংক্রান্ত	RB’17; Ctg.B’22; SB’22; JB’22, 19	
✪✪	**Q. Type-06:** ω এর ঘাতের মান নির্ণয় এবং ω এর ধারা সংক্রান্ত	Ctg.B’22, 19; BB’17; Din.B’17	
✪✪✪	**Q. Type-07:** শর্তাধীনে মান নির্ণয় ও প্রমাণ সংক্রান্ত	RB’22	DB’22; RB’19; Ctg.B’22; SB’22, 19, 17; BB’22, 19, 17; MB’22
✪✪	**Q. Type-08:** এককের ঘনমূল সংক্রান্ত	Ctg.B’22; Din.B’19	BB’19
✪✪✪	**Q. Type-09:** জটিল সংখ্যার জ্যামিতিক প্রয়োগ সংক্রান্ত	DB’19; Ctg.B’17; JB’22; CB’22, 19	DB’22; Ctg.B’22; SB’22, 19; BB’22; JB’17

Type-01: $A + iB$ আকারে প্রকাশ

➲ Concept:

বাস্তব অংশগুলোকে A ও কাল্পনিক অংশগুলোকে B আকারে প্রকাশ করতে হবে।

- ➢ যদি দুটি জটিল সংখ্যা গুণ আকারে থাকে তবে সাধারণ নিয়মে গুণ করে $A + iB$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।
- ➢ যদি দুটি জটিল সংখ্যা ভাগ আকারে থাকে তবে হরের জটিল সংখ্যার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে $A + iB$ আকারে প্রকাশ করতে হবে।

MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

নিচের উদ্দীপকের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও

$z = 3i$

01. $\overline{z}$ দ্বারা গঠিত বিন্দু কোনটি? [RB'22]

(a) $(0, -3)$ (b) $(0, 3)$

(c) $(-3, 0)$ (d) $(3, 0)$

সমাধান: (a); $\overline{z} = -3i$

02. অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার ক্ষেত্রে– [SB'22] [Ans: d]

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ (ii) $\overline{\overline{z}} = z$

(iii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii

(c) ii, iii (d) i, ii, iii

03. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল $\frac{1}{1+i}$ হলে অপর মূলটি কত? [CB'22]

(a) $\frac{1}{1-i}$ (b) $\frac{1-i}{2}$

(c) $\frac{1+i}{2}$ (d) $1 - i$

সমাধান: (c); একটি মূল $= \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1+1}$ $= \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, অপর মূল$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1+i}{2}$

04. $z = x + iy$ হলে- [RB'19]

(i) $z - \overline{z}$ একটি কাল্পনিক সংখ্যা

(ii) $z.\overline{z}$ একটি বাস্তব সংখ্যা

(iii) z^n একটি বাস্তব সংখ্যা, যেখানে $n \in \mathbb{N}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) ii, iii (c) i, iii (d) i, ii, iii

সমাধান: (a); ধরি, $n = 1$; $z^n = (x+iy)^1 = x + iy$

$z - \overline{z} = x + iy - (x - iy) = 2yi$

এবং $z.\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$

05. যদি $\frac{2+3i}{2-i} = A + iB$ এবং A ও B বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে B = কত? [BB'19]

(a) $\frac{-8}{5}$ (b) $\frac{1}{5}$ (c) $-\frac{1}{5}$ (d) $\frac{8}{5}$

সমাধান: (d); Use Calculator.

অথবা, $\frac{(2+3i)}{(2-i)} = \frac{(2+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1+8i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i \therefore B = \frac{8}{5}$

06. $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ এবং এর অনুবন্ধী $\overline{\alpha}$ হলে কোনটি সত্য? [All.B'18]

(a) $\alpha\overline{\alpha} = \alpha^2$ (b) $\alpha + \overline{\alpha} = 2\alpha$

(c) $\alpha + \overline{\alpha} = -1$ (d) $\overline{\alpha} + \alpha^2 = -1$

সমাধান: (c); $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \omega \therefore \overline{\alpha} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha + \overline{\alpha} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. [RB'22]

(ক) $\frac{2-3i}{4-4i}$ কে $A + iB$ আকারে প্রকাশ কর। 2

সমাধান

ক. $\frac{2-3i}{4-4i} = \frac{(2-3i)(4+4i)}{(4-4i)(4+4i)} = \frac{8-12i+8i-12i^2}{4^2+4^2} = \frac{20-4i}{32} = \frac{5-i}{8} = \frac{5}{8} - \frac{1}{8}i$

02. [Din.B'22]

(ক) $(2+i)(x+iy) = 1 + 3i$ হলে x, y নির্ণয় কর। 2

সমাধান

ক. $(2+i)(x+iy) = (1+3i) \Rightarrow x + iy = \frac{1+3i}{2+i} = \frac{(1+3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{2+6i-i-3i^2}{4+1} = \frac{5+5i}{5} = 1 + i \therefore x = 1; y = 1$

03. উদ্দীপক: $z = -2 + 2i$ একটি জটিল সংখ্যা- [CB'19]

(গ) $\overline{z} = (a^2 + 2) + ib$ সমীকরণটির মূল a এবং b এর প্রকৃতি নিরূপণ কর। 4

সমাধান

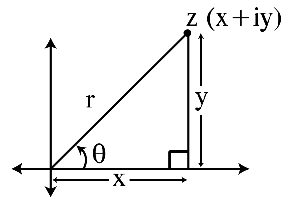
গ. $\overline{z} = (a^2+2) + ib \Rightarrow -2 - 2i = (a^2+2) + ib \therefore a^2 + 2 = -2,\ b = -2$

$a^2 = -4 \therefore a = \pm 2i$ কাজেই a জটিল মূল, b বাস্তব মূল।

Type-02: জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট সংক্রান্ত সমস্যা

Concept:

- মডুলাস: মডুলাস হলো মূলবিন্দু থেকে কোন জটিল সংখ্যার প্রতিরূপী বিন্দুর দূরত্ব।
  প্রকাশ: mod (z), |z|, r
- আর্গুমেন্ট: কোন জটিল সংখ্যা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ঐ জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট বলে।
  প্রকাশ: θ , arg (z)



চিত্র হতে, মডুলাস, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

অর্থাৎ, $z = x + iy$ একটি জটিল সংখ্যা হলে তার, $\boxed{\text{মডুলাস}, |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r}$

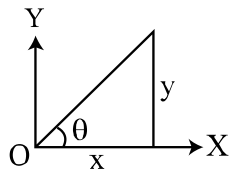
আর্গুমেন্ট ২ প্রকার: (i) মুখ্য আর্গুমেন্ট (Principal argument) (ii) সাধারণ আর্গুমেন্ট (General argument)

(i) মুখ্য আর্গুমেন্ট (Principal argument): x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কোন জটিল সংখ্যা যে ক্ষুদ্রতম কোন উৎপন্ন করে তাকে মুখ্য আর্গুমেন্ট বলে।
সীমা: $-\pi < x \leq \pi$ (আমরা আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে বললে মুখ্য আর্গুমেন্টই নির্ণয় করবো)

(ii) সাধারণ আর্গুমেন্ট (General argument): মুখ্য আর্গুমেন্ট ব্যতীত বাকি সব আর্গুমেন্টই সাধারণ আর্গুমেন্ট।

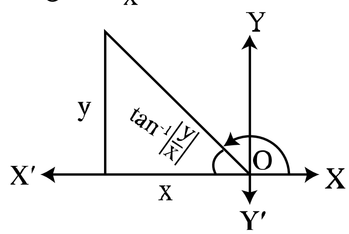
মুখ্য আর্গুমেন্ট নির্ণয়:

(i) প্রথম চতুর্ভাগে (1st Quadrant)



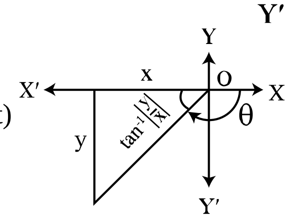
$\boxed{\arg(z) = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

(ii) দ্বিতীয় চতুর্ভাগে (2nd Quadrant)



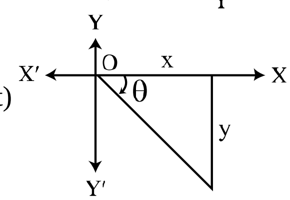
$\boxed{\arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

(iii) তৃতীয় চতুর্ভাগে (3rd Quadrant)



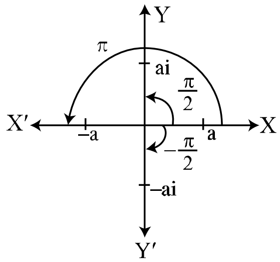
$\boxed{\arg(z) = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

(iv) চতুর্থ চতুর্ভাগে (4th Quadrant)



$\boxed{\arg(z) = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

(v) অক্ষদ্বয়ের উপরে থাকলে:
$a > 0$ হলে,
a এর মুখ্য আর্গুমেন্ট $= 0$
ai এর মুখ্য আর্গুমেন্ট $= \frac{\pi}{2}$
$-a$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট $= \pi$
$-ai$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট $= -\frac{\pi}{2}$



MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. $z_1 = 1 + 2i$ এবং $z_2 = 3 + i$, হলে $\overline{z_1} - z_2$ এর মডুলাস হল— **[DB'22]**
(a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{13}$
(c) $\sqrt{25}$ (d) $5\sqrt{2}$
সমাধান: (b); $|\overline{z}_1 - z_2| = |1 - 2i - 3 - i|$
$= |-2 - 3i| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

02. $-i$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট– **[Ctg.B'22]**
(a) 1 ও 0 (b) 1 ও $-\frac{\pi}{2}$
(c) 1 ও π (d) 1 ও $\frac{\pi}{2}$
সমাধান: (b); $|-i| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$
$\arg(-i) = -\tan^{-1}\left(\frac{-1}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}$

03. $-1 - i\sqrt{3}$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত? **[CB'22]**
(a) $-\frac{2\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$
(c) $-\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{4\pi}{3}$
সমাধান: (a); $z = -1 - i\sqrt{3}$;
$\arg(z) = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$

04. $z_1 = 1 + i$ এবং $z_2 = 2 + i$ হলে, $z_1\overline{z}_2$ এর মডুলাস- **[Din.B'22]**
(a) $\tan^{-1} 2$ (b) $2\sqrt{5}$
(c) $5\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{10}$
সমাধান: (d); $z_1 = 1 + i, \overline{z}_2 = 2 + i$
$z_1\overline{z}_2 = (1 + i)(2 - i) = 2 + 2i - i - i^2 = 3 + i$
$\therefore |z_1\overline{z}_2| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

05. $-3 - \sqrt{3}i$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট কত? **[MB'22]**
(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$
(c) $\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{7\pi}{6}$
সমাধান: (d); $z = -3 - \sqrt{3}i$
$\text{Arg}(Z) = 2n\pi + \left(\tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{3} - \pi\right)$
$= 2n\pi - \pi + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 2n\pi - \pi + \frac{\pi}{6} = 2n\pi - \frac{5\pi}{6}$
$n = 1$ বসিয়ে পাই, $\arg(Z) = 2\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

06. $z = x + iy$ হলে- **[MB'22] [Ans: a]**
(i) $|z| = |\overline{z}|$ (ii) $z.\overline{z} = |z|^2$
(iii) $\arg(\overline{z}) = \arg(z)$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i, ii (b) i, iii
(c) ii, iii (d) i, ii, iii

07. $1 + i$ জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট কত? **[SB'19]**
(a) $2, \frac{\pi}{4}$ (b) $\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}$
(c) $\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}$ (d) $2, \frac{\pi}{2}$
সমাধান: (b); $r = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ আর্গুমেন্ট
$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$

08. $z = -1 + i$ হলে, $\overline{z}$ এর আর্গুমেন্ট কত? **[JB'19]**
(a) $-\frac{3\pi}{4}$ (b) $-\frac{5\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $-\frac{\pi}{4}$
সমাধান: (a); $\overline{z} = -1 - i$
$\therefore \arg(\overline{z}) = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{1}{-1}\right| = -\frac{3\pi}{4}$

09. $1 - \sqrt{3}i$ এর সাধারণ আর্গুমেন্ট কত? **[All.B'18]**
(a) $2n\pi - \frac{\pi}{3} = 0; n \in \mathbb{Z}$
(b) $2n\pi + \frac{\pi}{3} = 0; n \in \mathbb{Z}$
(c) $2n\pi - \frac{5\pi}{3} = 0; n \in \mathbb{Z}$
(d) $2n\pi + \frac{\pi}{3} = 0; n \in \mathbb{Z}$
সমাধান: (a); সাধারণ আর্গুমেন্ট $\tan\theta = -\sqrt{3}$
$\therefore \theta = 2n\pi + \left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2n\pi - \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

10. $-2 - 2i$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত? **[RB'17]**
(a) $-\frac{3\pi}{4}$ (b) $-\frac{\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{3\pi}{4}$
সমাধান: (a); মুখ্য আর্গুমেন্ট $= -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{-3\pi}{4}$

11. $-\sqrt{3} + i$ এর আর্গুমেন্ট কত? **[Ctg.B'17]**
(a) $\frac{-\pi}{6}$ (b) $\frac{-5\pi}{6}$
(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{5\pi}{6}$
সমাধান: (d); $\arg\left(-\sqrt{3} + i\right) = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{1}{-\sqrt{3}}\right| = \frac{5\pi}{6}$

12. $z = -4 - 3i$ হলে, $|z| = ?$ **[BB'17]**
(a) $\sqrt{7}$ (b) 5 (c) 7 (d) 25
সমাধান: (b); $|\overline{z}| = |-4 + 3i| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$

13. $z = \frac{1}{1+i}$ এর আর্গুমেন্ট কোনটি? **[CB'17]**
(a) $\frac{-3\pi}{4}$ (b) $\frac{-\pi}{4}$
(c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{3\pi}{4}$
সমাধান: (b); $z = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$
$\therefore$ আর্গুমেন্ট $= -\tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = -\frac{\pi}{4}$

CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. (ক) $6-2\sqrt{3}i$ জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। **[Ctg.B’22]**

সমাধান

ক. ধরি, $z=6-2\sqrt{3}i \therefore |z|=\sqrt{(6)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{36+12}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$

$\therefore \arg(z)=-\tan^{-1}\left|\frac{-2\sqrt{3}}{6}\right|=-\frac{\pi}{6}$

02. $z_1=1+ia, z_2=a+i;$ **[BB’22]**

(খ) $a=\sqrt{3}$ হলে দেখাও যে, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$. **4**

সমাধান

খ. $a=\sqrt{3}$ হলে; $z_1=1+\sqrt{3}i,\ z_2=\sqrt{3}+i$

$\therefore \frac{z_1}{z_2}=\frac{1+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}=\frac{(1+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\frac{\sqrt{3}-i+3i-\sqrt{3}i^2}{3+1}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}+2i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i \therefore \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\tan^{-1}\left|\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right|=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \arg(z_1)-\arg(z_2)=\tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right|-\tan^{-1}\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

$\therefore \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\arg(z_1)-\arg(z_2)$ [**Showed.**]

03. উদ্দীপক-১: $z=-1+i$ একটি জটিল সংখ্যা। **[CB’22]**

(খ) উদ্দীপক-১ এ উল্লিখিত জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট আর্গন্ড চিত্রে দেখাও। **4**

সমাধান

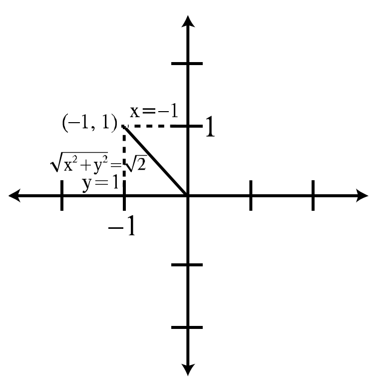
খ. $z=-1+i=x+iy \therefore x=-1, y=1$

$\therefore$ আর্গন্ড তলে সংখ্যাটির প্রতিরূপী বিন্দু $(-1,1)$

$\therefore |z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$

$\therefore \arg(z)=\arg(x+iy)=\pi-\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|\ [\because y>0; x<0]$

$=\pi-\tan^{-1}\left|\frac{1}{-1}\right|=\frac{3\pi}{4}$



04. উদ্দীপক: $z=-2+2i$ একটি জটিল সংখ্যা **[CB’19]**

(ক) z এর মুখ্য আর্গুমেন্ট বের কর। **2**

সমাধান

ক. $z=-2+2i$; এটি দ্বিতীয় চতুর্ভাগে। $\arg(z)=\tan^{-1}\left(\frac{2}{-2}\right)=\tan^{-1}(-1)=\pi-\tan^{-1}(1)=\frac{3\pi}{4}$

05. $a = x^3,\ b = 8.$ **[Din.B'19]**

(গ) $a - b = 0$ সমীকরণের জটিল মূলদ্বয়, z_1 ও z_2 হলে, প্রমাণ কর যে, $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$। **4**

সমাধান

গ. $a - b = 0 \Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x^3 = 2^3 \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^3 = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = 1, \omega, \omega^2$

$\therefore x = 2, 2\omega, 2\omega^2 = 2, -1 + \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i \ \therefore z_1 = -1 + \sqrt{3}i\ ;\ z_2 = -1 - \sqrt{3}i$

$z_1z_2 = (-1 + i\sqrt{3})(-1 - i\sqrt{3}) = (1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3}) = 1 - i^2.3 = 4 \ \therefore \arg(z_1z_2) = 0$

আবার, $\arg(z_1) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \pi - \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}$

এবং $\arg(z_2) = \tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = -\pi + \tan^{-1}(\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{3}$

$\therefore \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 0 \ \therefore \arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

06. দৃশ্যকল্প ১: $z = 2 + 4i - i^2$ **[RB'17]**

(গ) দৃশ্যকল্প-১ এ $\bar{z}$ এর বর্গমূলের মডুলাস সর্বদা $\sqrt{5}$ সঠিক কী না যাচাই কর। যেখানে $\bar{z}$ হচ্ছে z এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা। **4**

সমাধান

গ. দেওয়া আছে, $z = 2 + 4i - i^2 \Rightarrow 2 + 4i - (-1) \Rightarrow 2 + 4i + 1 = 3 + 4i$

$\bar{z}, z$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা।

$\therefore\ \bar{z} = 3 - 4i$

এখন, $3 - 4i = 2^2 - 4i + (i)^2 = (2 - i)^2 \ \therefore\ \sqrt{\bar{z}} = \sqrt{3 - 4i} = \pm(2 - i) = \pm 2 \pm i$

$\therefore$ বর্গমূল এর মডুলাস $= \sqrt{(\pm 2)^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

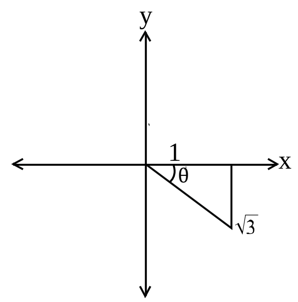
07. $z = -2 - 2\sqrt{3}\,i$ একটি জটিল রাশি। **[SB'17]**

(খ) $\text{Arg}\left(\sqrt{z}\right)$ নির্ণয় কর। **4**

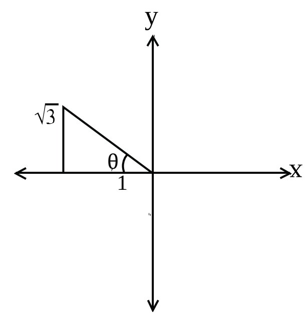
সমাধান

খ. দেওয়া আছে, $z = -2 - 2\sqrt{3}i = 1^2 - 2.1\sqrt{3}i + \left(\sqrt{3}i\right)^2 = \left(1 - \sqrt{3}i\right)^2 \ \therefore \sqrt{z} = \pm(1 - \sqrt{3}i)$

ধরি, $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ এবং $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$



$\therefore \arg z_1 = -\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) \Rightarrow -\frac{\pi}{3}$



$\therefore \arg z_2 = \pi - \theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

08. **[CB'17]**

(ক) $\frac{1}{2-i}$ এর আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। **2**

সমাধান

ক. $\frac{1}{2-i} = \frac{2+i}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i}{4-i^2} = \frac{2+i}{4-i^2} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2+i}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$; আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

Type-03: জটিল সংখ্যার পোলার প্রতিরূপ সংক্রান্ত

Concept:

$z = x + iy$ হলে, $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$ এবং $x^2 + y^2 = r^2$ $\therefore$ জটিল সংখ্যাটির পোলার প্রতিরূপ,

$z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$ [অয়লারের সূত্রঃ $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$]

MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. $-1 + i$ এর পোলার আকার— **[CB'22]**

(a) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(c) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ (d) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

সমাধান: (d); $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \pi - \tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{3\pi}{4}$

$\therefore 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

Type-04: মূল নির্ণয় সংক্রান্ত

Concept:

Case – (a): বর্গমূল নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

- **জটিল সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়ের পদ্ধতি:**

Step-01: যেখানে i থাকবে সেখানে 2 নিয়ে আসতে হবে।

Step-02: 2 এর সাথে যা থাকবে তাকে দুটি উৎপাদকের গুণফল আকারে এমনভাবে প্রকাশ করতে হবে যেন তাদের বর্গের যোগফল বাস্তব অংশ হয়।

Step-03: প্রদত্ত জটিল সংখ্যার বাস্তব অংশ যদি ধনাত্মক [+ve] হয় তবে ছোট উৎপাদকের সাথে i আর যদি বাস্তব অংশ ঋণাত্মক [−ve] হয় তবে বড় উৎপাদকের সাথে i নিতে হবে। [বাস্তব অংশ শূন্য হলে সেক্ষেত্রে যেকোনটির সাথে i নিলে হবে, কারণ উৎপাদকদ্বয় সমান হবে।]

Step-04: উৎপাদক দুটির মধ্যে যার সাথে i থাকবে না সেটাকে a এবং যার সাথে i থাকবে সেটাকে b বিবেচনা করে $(a + b)^2$ বা, $(a - b)^2$ এর সূত্র নিয়ে আসতে হবে।

Formula: $a \pm ib$ এর বর্গমূল $= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{r + a}$ চিহ্ন $i\sqrt{r - a})$ [যেখানে $r = \sqrt{a^2 + b^2}$]

[Note: বামপক্ষে i এর সামনে যে চিহ্ন থাকবে formula টির ডানপক্ষে 'চিহ্ন' লেখা স্থানে ঐ চিহ্ন বসবে]

Case – (b): ঘনমূল সম্বলিত

Concept: এককের 3 টি ঘনমূল $1, \omega, \omega^2$

(i) $\omega^3 = 1$, (ii) $1 + \omega + \omega^2 = 0$ [যেখানে, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$]

Shortcut for MCQ:

$\sqrt[3]{a^3} = a, a\omega, a\omega^2$; $\sqrt[3]{-a^3} = -a, -a\omega, -a\omega^2$

$\sqrt[3]{-a^3 i} = ai, ai\omega, ai\omega^2$; $\sqrt[3]{a^3 i} = -ai, -ai\omega, -ai\omega^2$

Case – (c): চতুর্মূল সম্বলিত

➲ **Concept:** $\sqrt[4]{\text{রাশি}} = x$ ধরে করতে হবে।

Case – (d): ষষ্ঠমূল সম্বলিত

➲ **Concept:** $\sqrt[6]{1} = \pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2$; $\sqrt[6]{\text{রাশি}} = x$ ধরে করতে হবে।

Case – (e): n তম মূল নির্ণয় [যেখানে n যে কোন স্বাভাবিক সংখ্যা]

n তম মূল $\sqrt[n]{z}$ হবে n সংখ্যক

ধরি, $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ [Polar form]

$\Rightarrow z = r[\cos(2k\pi + \theta) + i\sin(2k\pi + \theta)]$ $[k = 0,1,2,3 \ldots\ldots]$ $\left[\because \begin{matrix}\cos\theta = \cos(2k\pi + \theta)\\ \sin\theta = \sin(2k\pi + \theta)\end{matrix}\right]$

$\therefore z = re^{i(2k\pi+\theta)}$

$\Rightarrow z^{\frac{1}{n}} = \left\{re^{i(2k\pi+\theta)}\right\}^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}} e^{i}\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{\theta}{n}\right) \Rightarrow \frac{z^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}}} = e^{i\left(\frac{2k\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$

$k = 0,1,2, \ldots\ldots\ldots\ldots, n-1$ বসালে মোট n টি মূল পাওয়া যায়।

$k = 0$ হলে, $\frac{z^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}}} = e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)} \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{১ম মূল}}}{z_1} = r^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}\right)}$ $\left[\text{মডুলাস } r^{\frac{1}{n}},\ \text{আর্গুমেন্ট } \frac{\theta}{n}\right]$

$\left[\text{Arg এর বৃদ্ধি } \frac{2\pi}{n}\right]$

$k = 1$ হলে, $\frac{z^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)} \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{২য় মূল}}}{z_2} = r^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(\frac{2\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)}$ $\left[\text{মডুলাস } r^{\frac{1}{n}}, \text{আর্গুমেন্ট } \frac{2\pi}{n} + \frac{\theta}{n}\right]$

$\left[\text{Arg এর বৃদ্ধি } \frac{2\pi}{n}\right]$

$k = 2$ হলে, $\frac{z^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}}} = e^{i\left(2.\frac{2\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)} \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{৩য় মূল}}}{z_3} = r^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left(2.\frac{2\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)}$ $\left[\text{মডুলাস } r^{\frac{1}{n}}, \text{আর্গুমেন্ট } 2.\frac{2\pi}{n} + \frac{\theta}{n}\right]$

………

………

$k = n-1$ হলে, $\frac{z^{\frac{1}{n}}}{r^{\frac{1}{n}}} = e^{i\left((n-1)\frac{2\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)} \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow\\ \text{n তম মূল}}}{z_n} = r^{\frac{1}{n}}\, e^{i\left((n-1)\frac{2\pi}{n}+\frac{\theta}{n}\right)}$ $\left[\text{মডুলাস } r^{\frac{1}{n}}, \text{আর্গুমেন্ট } (n-1)\frac{2\pi}{n} + \frac{\theta}{n}\right]$

সিদ্ধান্ত:

(i) n তম মূল হবে n সংখ্যক।

(ii) যদি $(z = re^{i\theta})$ হয় জটিল সংখ্যাটি তাহলে তার n তম মূলের (প্রতিটিরই) মডুলাস হবে $r^{\frac{1}{n}}$

(iii) প্রথম মূলের আর্গুমেন্ট হবে $\frac{\theta}{n}$

(iv) বাকি সব মূলের প্রতিটির আর্গুমেন্ট $\frac{2\pi}{n}$ করে বৃদ্ধি পাবে

$r\angle\theta$ আকারে এটাকে লেখা যায় $(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{মূলের মডুলাস}}}{r}, \underset{\substack{\uparrow\\ \text{মূলের আর্গুমেন্ট বৃদ্ধি}}}{\Delta\theta}) = (r^{\frac{1}{n}}, \frac{2\pi}{n})$

♦ **বাস্তব সংখ্যার n তম মূল:**

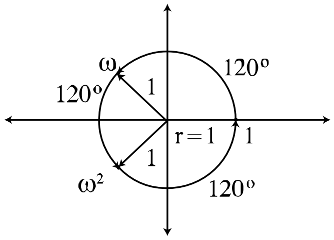
$\sqrt[3]{1} = 1, \quad \omega, \quad \omega^2$

1: মডুলাস = 1, Arg = 0 = 0°

ω: মডুলাস = 1, Arg = $0 + \frac{2\pi}{3}$ = 120° $\left[\frac{2\pi}{n} \text{ বৃদ্ধি } n = 3\right]$

ω^2: মডুলাস = 1, Arg = $0 + 2.\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = 240°$

এগুলোকে লেখা যায় $1\angle\frac{2\pi}{3}$



Note: চিত্রগুলো লক্ষ কর এবং বামপাশের কথাগুলো বোঝার চেষ্টা কর।

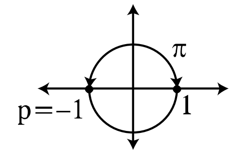
<table>
<tr><td>

(i) 1 এর বর্গমূলদ্বয় $1, -1$

বা এভাবে লেখা যায়, 1 এর বর্গমূলদ্বয় 1, p যেখানে, $p = 1.e^{i.\frac{2\pi}{2}} = e^{i\pi}$

[p এর মডুলাস $= 1, \text{Arg} = \frac{2\pi}{2} = \pi$] [$p = 1\angle\pi$]

</td><td>

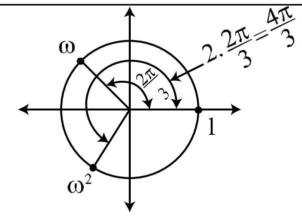


</td></tr>
<tr><td>

(ii) 1 এর ঘনমূলগুলো $1, \omega, \omega^2$ যেখানে, $\omega = 1.e^{i\frac{2\pi}{3}}$ [ω এর মডুলাস $= 1, \text{Arg} = \frac{2\pi}{3}$] $\omega^2 = 1.e^{i.\,2.\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

[ω^2 এর মডুলাস $= 1, \text{Arg} = 2.\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$] [$\omega = 1\angle\frac{2\pi}{3}$, $\omega^2 = 1\angle\frac{4\pi}{3}$]

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

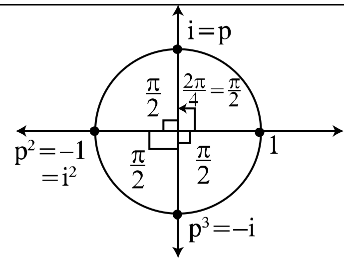
(iii) 1 এর চর্তুমূলগুলো $1, p, p^2, p^3$ যেখানে, $p = 1.e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

p এর মডুলাস $= 1, \text{Arg} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ [$p = 1\angle\frac{\pi}{2}$]

সেক্ষেত্রে $p = i, p^2 = i^2 = -1, \ p^3 = i^3 = -i$

$\therefore$ 1 এর চর্তুমূলগুলো $\pm 1, \pm i$

</td><td>

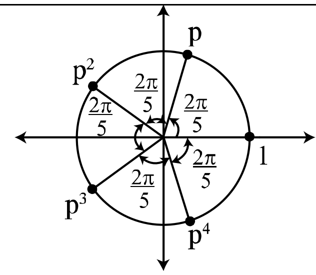


</td></tr>
<tr><td>

(iv) 1 এর পঞ্চমূলগুলো $1, p, p^2, p^3, p^4$ যেখানে, $p = 1.e^{i\frac{2\pi}{5}} = e^{i\frac{2\pi}{5}}$

p এর মডুলাস $= 1, \text{Arg} = \frac{2\pi}{5}$ [$p = 1\angle\frac{2\pi}{5}$]

</td><td>



</td></tr>
<tr><td>

(v) 1 এর ষড়মূলগুলো $1, p, p^2, p^3, p^4, p^5$; যেখানে, $p = 1.e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

p এর মডুলাস $= 1, \text{Arg} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ $\left[p = 1\angle\frac{\pi}{3}\right]$

আসলে, $p^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \omega$

$p^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \omega^2$

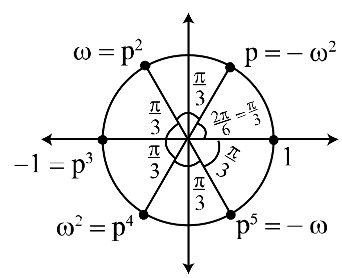
p^5, p^2 এর বিপরীতে আছে, $\therefore p^5 = -p^2 = -\omega$

$p^3, 1$ এর বিপরীতে আছে, $p^3 = -1$

p, p^4 এর বিপরীতে আছে, $p = -p^4 = -\omega^2$

$\therefore$ 1 এর ষড়মূলগুলো; $\pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2$

</td><td>



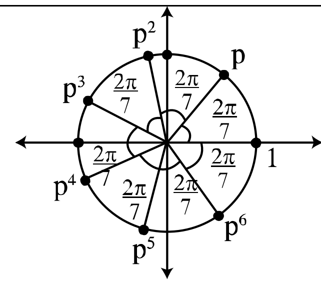
</td></tr>
<tr><td>

(vi) 1 এর সপ্তমূলগুলো, $1, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6$

যেখানে, $p = 1.e^{i\frac{2\pi}{7}} = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ [p এর মডুলাস $1, \text{Arg} = \frac{2\pi}{7}$] [$p = 1\angle\frac{2\pi}{7}$]

এভাবে নির্ণয় করা যায়।

</td><td>



</td></tr>
</table>

MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. $z = 1 - i$ হলে $z - \bar{z}$ এর বর্গমূল কত? [DB'22]
(a) $-1 - i$ (b) $\pm(1 + i)$
(c) $\pm(1 - i)$ (d) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i)$
সমাধান: (c); $z - \bar{z} = 1 - i - (1 + i) = -2i$
$\therefore \sqrt{z - \bar{z}} = \pm\sqrt{-2i} = \pm\sqrt{1 - 2i - 1}$
$= \pm\sqrt{1 - 2.1.i + i^2} = \pm\sqrt{(1 - i)^2} = \pm(1 - i)$

02. $\sqrt[4]{-49}$ এর মান কোনটি? [DB'22]
(a) $\pm\sqrt{7}i$ (b) $\pm\sqrt{\frac{7}{2}}(1 \pm i)$
(c) $\pm\frac{7}{2}(1 \pm i)$ (d) $\frac{7}{\sqrt{2}}(1 \pm 2i)$
সমাধান: (b); $\sqrt[4]{-49} = \pm\sqrt{\sqrt{49i^2}} = \pm\sqrt{(\pm 7i)}$
$= \pm\sqrt{7}.\sqrt{\pm i} = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\sqrt{\pm 2i} = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{(1 \pm 2i + i^2)}$
$= \pm\sqrt{\frac{7}{2}}\sqrt{(1 \pm i)^2} = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}(1 \pm i)$

03. $8 + 4\sqrt{5}i$ এর বর্গমূল কোনটি? [BB'22]
(a) $\pm(3 - 2i)$ (b) $\pm(\sqrt{10} - \sqrt{2}i)$
(c) $\pm(\sqrt{10} + \sqrt{2}i)$ (d) $\pm(3 + 2i)$
সমাধান: (c); $8 + 4\sqrt{5}i = 10 - 2 + 4\sqrt{5}i$
$= (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{2}i)^2 + 2.\sqrt{2}i\sqrt{10} = (\sqrt{10} + \sqrt{2}i)^2$
$\therefore \sqrt{8 + 4\sqrt{5}i} = \pm(\sqrt{10} + \sqrt{2}i)$

04. $z = x + iy$ হলে, $z\bar{z} = 1$ সমীকরণের জ্যামিতিক রূপ কোনটি? [CB'19]
(a) অধিবৃত্ত (b) বৃত্ত
(c) উপবৃত্ত (d) পরাবৃত্ত
সমাধান: (b); $z\bar{z} = |z|^2 = 1 \;\therefore x^2 + y^2 = 1$

05. $p = x + iy$ হলে, $|p + 2| = 3$ নির্দেশ করে- [Din.B'19]
(a) বৃত্ত (b) সরলরেখা
(c) প্যারাবোলা (d) উপবৃত্ত
সমাধান: (a); $|x + iy + 2| = 3 \Rightarrow (x + 2)^2 + y^2$
$= 3^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0 \;\therefore$ বৃত্ত।

06. $z = -1 + i\sqrt{3}$ হলে– [Din.B'17]
(i) $z^9 = 64$ (ii) z এর আর্গুমেন্ট $120°$
(iii) z– এর বর্গমূল $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 - i\sqrt{3})$
নিচের কোনটি সঠিক?
(a) i (b) ii
(c) ii, iii (d) i, ii, iii
সমাধান: (b); $z^9 = \frac{(-1+\sqrt{3}i)^9}{2^9}.2^9 = \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^9.2^9$
$= (\omega^2)^9 2^9 = 2^9 = 512; \theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right|$

CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. দৃশ্যকল্প-১: $z = 32 + i.$ [Ctg.B'22]
(খ) দৃশ্যকল্প-১ থেকে $z + \bar{z}$ এর ঘনমূল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. $z + \bar{z} = 32 + i + 32 - i = 64$
ধরি, $z + \bar{z}$ এর ঘনমূল x
$\therefore \sqrt[3]{z + \bar{z}} = x \Rightarrow \sqrt[3]{64} = x \Rightarrow x^3 - 64 = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{64} = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{4}\right)^3 = 1$
$\Rightarrow \frac{x}{4} = 1, \omega, \omega^2 \;\therefore x = 4, 4\omega, 4\omega^2 \;\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল: $4, 4\omega, 4\omega^2$

02. $a = 4, b = \sqrt{-4}, z = \frac{1}{n}(l + im)$ একটি জটিল সংখ্যা। [RB'22]
(খ) $\sqrt{a + b}$ নির্ণয় কর। 4
(গ) $l = m = 3, n = \sqrt{18}$ হলে $|z|$ এর ঘনমূলগুলোর যোগফল নির্ণয় কর। 4

সমাধান

খ. ধরি, $\sqrt{a + b} = \sqrt{4 + \sqrt{-4}} = \sqrt{4 + 2i} = x + iy \;\therefore (x + iy)^2 = 4 + 2i$
$\Rightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 4 + 2i \;\therefore x^2 - y^2 = 4 \ldots\ldots (i)$
$2xy = 2 \ldots\ldots (ii) \;\therefore x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5} \ldots\ldots (iii)$
(i) ও (iii) যোগ করে পাই, $2x^2 = 4 + 2\sqrt{5} \Rightarrow x^2 = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \pm\sqrt{2 + \sqrt{5}}$
(iii) হতে (i) বিয়োগ করে পাই, $2y^2 = 2\sqrt{5} - 4 \Rightarrow y^2 = \sqrt{5} - 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\sqrt{5} - 2}$
$\therefore \sqrt{a + ib} = \pm\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \left(\pm\sqrt{\sqrt{5} - 2}\right)i = \pm\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2} + \sqrt{\sqrt{5} - 2}i\right)$

গ. $z = \frac{1}{n}(l + im) = \frac{1}{\sqrt{18}}(3 + 3i) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3 + 3i) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i) \therefore |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2 + 1^2} = 1$

ধরি, $\sqrt[3]{|z|} = x \Rightarrow x^3 - |z| = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1, \omega, \omega^2 \therefore 1 + \omega + \omega^2 = 0$

$\therefore$ নির্ণেয় যোগফল 0

03. (ক) $\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। **[BB'22]**

সমাধান

ক. $\sqrt{\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{i} = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \times 2i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2i + 1 - 1} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + i^2}$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1 + i)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$

04. $M = -5 + 12\sqrt{-1}$, **[JB'22]**

(খ) M এর বর্গমূল নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

খ. $M = -5 + 12i = -5 + 2 \times 6i = (2)^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 = (2 + 3i)^2 \therefore \sqrt{m} = \pm(2 + 3i)$

05. (ক) $-5 + 12\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। **[RB'19]**

সমাধান

ক. $-5 + 12\sqrt{-1} = -5 + 12i$

ধরি, $\sqrt{-5 + 12i} = x + iy \Rightarrow -5 + 12i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$\therefore x^2 - y^2 = -5 \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$2xy = 12 \ldots\ldots\ldots\ldots (ii)$

$x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (12)^2}$

$x^2 + y^2 = 13 \ldots\ldots\ldots\ldots (iii)$

$\therefore x^2 = 4 \;\therefore x = \pm 2$

$y^2 = 9 \;\therefore y = \pm 3 \;\;\therefore\; \sqrt{-5 + 12i} = \pm(2 + 3i)$

06. (ক) মান নির্ণয় কর: $\sqrt[3]{i}$ **[Ctg.B'19]**

সমাধান

ক. প্রদত্ত রাশি = $\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{i(-i^2)} = \sqrt[3]{-i^3} = -i$

Type-05: i এর ঘাতের মান নির্ণয় এবং ধারা সংক্রান্ত

Concept:

(i) $i^{4n+1} = i^1 = i,\ i^{4n+2} = i^2 = -1,\ i^{4n+3} = i^3 = -i,\ i^{4n} = i^4 = 1$

(ii) a, b, c, d চারটি ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা হলে, $i^a + i^b + i^c + i^d = 0$

(iii) a ও b দুইটি ক্রমিক বিজোড় সংখ্যা হলে, $i^a + i^b = 0$

(iv) a ও b দুইটি ক্রমিক জোড় সংখ্যা হলে, $i^a + i^b = 0$

MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. $i^2 = -1$ হলে $\frac{-i-i^{-5}}{2i^{-5}+i}$ এর মান– **[Ctg.B'22]**

(a) -2 (b) 0 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

সমাধান: (b); Use Calculator

02. $n \in \mathbb{N}$ হলে i^{8n+5} এর মান কত? **[SB'22]**

(a) 1 (b) -1 (c) i (d) $-i$

সমাধান: (c); $i^{8n+5} = i^{4\times 2n}.i^5 = 1.i = i$

03. $i^2 = -1$ হলে i^{-39} এর মান- **[JB'22]**

(a) -1 (b) 1 (c) $-i$ (d) i

সমাধান: (d); Use Calculator

04. $i^7 + i^9 + i^{11} + i^{13}$ এর মান কত? **[Din.B'22][Ans: d]**

(a) -1 (b) 1 (c) $-i$ (d) 0

05. $(2i)^{-\frac{1}{2}} + (-2i)^{-\frac{1}{2}}$ এর মান কত? **[JB'19]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) 0 (d) ∞

সমাধান: (b); $2i = 1 + i^2 + 2.1.i = (1+i)^2$

$\Rightarrow (2i)^{\frac{1}{2}} = 1 + I$; $-2i = 1 + i^2 - 2.1.i$

$= (1-i)^2 \Rightarrow (-2i)^{\frac{1}{2}} = 1 - i$

$\therefore (2i)^{-\frac{1}{2}} + (-2i)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i} = \frac{1+i+1-i}{1-i^2} = \frac{2}{2} = 1$

06. $i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3} =$ কত? $[m \in \mathbb{Z}]$ **[RB'17]**

(a) -1 (b) $-i$ (c) 0 (d) i

সমাধান: (c); $i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3}$

$= i^m(1 + i + i^2 + i^3) = i^m(1 + i - 1 - i) = 0$

Type-06: ω এর ঘাতের মান নির্ণয় এবং ω এর ধারা সংক্রান্ত

➲ **Concept:**

$\omega^1 = \omega$	$\omega^4 = \omega^3.\omega = \omega$	$\omega^7 = \omega^6.\omega = \omega$
$\omega^2 = \omega^2$	$\omega^5 = \omega^3.\omega^2 = \omega^2$	$\omega^8 = \omega^6.\omega^2 = \omega^2$
$\omega^3 = 1$	$\omega^6 = \omega^3.\omega^3 = 1$	$\omega^9 = \omega^6.\omega^3 = 1$

(i) $\omega^{3n+1} = \omega^{3n}.\omega^1 = (\omega^3)^n.\omega^1 = 1^n.\omega = \omega$

(ii) $\omega^{3n+2} = \omega^{3n}.\omega^2 = 1.\omega^2 = \omega^2$

(iii) $\omega^{3n} = (\omega^3)^n = 1^n = 1$

∴ ω এর ঘাতকে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ থাকলে ω এর ঘাতের মান = $\omega^{\text{ভাগশেষ}}$

অর্থাৎ, $\omega^p = \omega^q$ [যখন, q হলো p কে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ]

আবার, $1 + \omega + \omega^2 = 0$

তাহলে, $\omega^5 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^2 + 1 + \omega = 0$

এভাবে ω এর তিনটি ক্রমিক ঘাতের যোগফল = 0

বা, a, b, c তিনটি ক্রমিক সংখ্যা হলে, $\omega^a + \omega^b + \omega^c = 0$

MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $\frac{2}{\omega^{13}+\omega^{26}}$ এর মান– **[Ctg.B'22]**

(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 2

সমাধান: (a); $\frac{2}{\omega^{13}+\omega^{26}} = \frac{2}{\omega^{4\times3+}+\omega^{8\times3+2}} = \frac{2}{\omega+\omega^2}$

$= \frac{2}{-1} = -2$

02. ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল হলে $(1-\omega^4)(1-\omega^8)(1-\omega^{10})(1-\omega^{14})$ এর মান হল- **[Ctg.B'19]**

(a) -1 (b) 1 (c) 3 (d) 9

সমাধান: (d); $(1-\omega)^2(1-\omega^2)^2$

$= (1 - \omega - \omega^2 + \omega^3)^2 = 3^2 = 9$

03. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে $\omega^{6n+3} = ?$ **[BB'17]**

(a) -1 (b) 1

(c) ω (d) ω^2

সমাধান: (b); $\omega^{6n+3} = \omega^{6n}.\omega^3 = 1.$

04. $\frac{1}{\omega^{2015}} + \frac{1}{\omega^{2016}} + \frac{1}{\omega^{2017}}$ এর মান কোনটি? **[Din.B'17]**

(a) $-2\omega^2$ (b) -2ω

(c) 0 (d) 3

সমাধান: (c); $\frac{1}{\omega^{2015}} + \frac{1}{\omega^{2016}} + \frac{1}{\omega^{2017}} = \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^3} + \frac{1}{\omega^1}$

$= \frac{1}{\omega^2} + 1 + \frac{1}{\omega} = \frac{\omega+\omega^3+\omega^2}{\omega^3} = 0$

Type-07: শর্তাধীনে মান নির্ণয় ও প্রমাণ সংক্রান্ত

➲ **Concept:** এক্ষেত্রে জটিল সংখ্যার ধর্মগুলো ব্যবহার করতে হবে।

MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. $x + iy = i^{-2021} + 2(\omega)^{-2019}$ হলে $\frac{y}{x} = ?$ **[RB'22]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) -2

সমাধান: (b); $i^{-2021} + 2(\omega)^{-2019} = \frac{1}{i^{2021}} + \frac{2}{\omega^{2019}} = \frac{1}{i} + \frac{2}{\omega^3} = -i + 2 = 2 - i \therefore x + iy = 2 - i$

$\therefore \frac{y}{x} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. উদ্দীপকে: $z = x + iy$ **[DB'22]**

(খ) $\sqrt[3]{p + iq} = z$ হলে, দেখাও যে, $\sqrt[3]{p - iq} = \bar{z}$ **4**

সমাধান

খ. দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{p + iq} = z = x + iy$

দেখাতে হবে যে, $\sqrt[3]{p - iq} = \bar{z} = x - iy$

প্রশ্নমতে, $\sqrt[3]{p + iq} = x + iy \Rightarrow P + iq = (x + iy)^3 \Rightarrow p + iq = x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3$

$\Rightarrow p + iq = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i$

$\therefore p = x^3 - 3xy^2; q = 3x^2y - y^3$

$\therefore p - iq = x^3 - 3xy^2 - (3x^2y - y^3)i = x^3 - 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3(-i)^3$

$= x^3 - 3x^2(yi) + 3x(yi)^2 - (yi)^3 = (x - iy)^3 \therefore \sqrt[3]{p - iq} = x - iy$ [**Showed**]

02. দৃশ্যকল্প-২: $(1 + y)^n = b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \cdots + b_ny^n$. **[Ctg.B'22]**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণ হতে দেখাও যে,

$(b_0 - b_2 + b_4 - \cdots\cdots)^2 = (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\cdots) - (b_1 - b_3 + b_5 - \cdots\cdots)^2$ **4**

সমাধান

গ. $(1 + y)^n = b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \ldots\ldots\ldots b_ny^n$

$y = 1$ বসিয়ে পাই, $(1 + 1)^n = b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots\ldots + b_n \ldots\ldots\ldots.(i)$

$(1 + 1)^n = (1 - i^2)^n = (1 + i)^n(1 - i)^n \ldots\ldots\ldots(ii)$

$(1 + i)^n = b_0 + b_1i + b_2i^2 + b_3i^3 + b_4i^4 + b_5i^5 + \ldots\ldots\ldots$

$= b_0 + b_1i - b_2 - b_3i + b_4 + b_5i + \ldots\ldots\ldots$

$= (b_0 - b_2 + b_4 - \ldots\ldots\ldots) + (b_1 - b_3 + b_5 - \ldots\ldots\ldots)i$

$(1 - i)^n = b_0 + b_1(-i) + b_2(-i)^2 + b_3(-i)^3 + b_4(-i)^4 + b_5(-i)^5 + \ldots\ldots\ldots$

$= b_0 - b_1i - b_2 + b_3i + b_4 - b_5i + \ldots\ldots\ldots$

$= (b_0 - b_2 + b_4 - \ldots\ldots\ldots) - (b_1 - b_3 + b_5 - \ldots\ldots\ldots)i$

$\therefore (1 + i)^n(1 - i)^n = \{(b_0 - b_2 + b_4 - \ldots\ldots) + (b_1 - b_3 + b_5 \ldots\ldots)i\}\{(b_0 - b_2 + b_4 - \ldots\ldots) - (b_1 - b_3 + b_5 - \ldots\ldots)i\}$

$= (b_0 - b_2 + b_4 - \ldots\ldots\ldots)^2 + (b_1 - b_3 + b_5 - \ldots\ldots\ldots)^2$

$\Rightarrow (1 + 1)^n = (b_0 - b_2 + b_4 - \ldots\ldots\ldots)^2 + (b_1 - b_3 + b_5 - \ldots\ldots\ldots)^2$ [(ii)]

$\Rightarrow b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots\ldots = (b_0 - b_2 + b_4 \ldots\ldots\ldots)^2 + (b_1 - b_3 + b_5 - \ldots\ldots\ldots)^2$ [(i)]

$\therefore (b_0 - b_2 + b_4 + \ldots\ldots\ldots)^2 = (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots\ldots\ldots) - (b_1 - b_3 + b_5 - \ldots\ldots\ldots)^2$ (**Showed.**)

03. (ক) $a + ib = e^{i\theta}$ হলে দেখাও যে, $a^2 + b^2 = 1$ [Ctg.B'22]

সমাধান

ক. $a + ib = e^{i\theta} \Rightarrow a + ib = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow |a + ib| = |\cos\theta + i\sin\theta|$
$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \therefore a^2 + b^2 = 1$ (**Showed.**)

04. $g(x) = p + qx + rx^2$ একটি ফাংশন। [SB'22]
(গ) $p + q + r = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\{g(\omega)\}^2 + \{g(\omega^2)\}^2 = 3(p^2 + 2qr)$, যেখানে ω এককের ঘনমূলগুলোর একটি জটিল মূল। 4

সমাধান

গ. $p + q + r = 0$ প্রমাণ করতে হবে যে, $\{g(\omega)\}^2 + \{g(\omega^2)\}^2 = 3(p^2 + 2qr)$
$L.H.S = \{g(\omega)\}^2 + \{g(\omega^2)\}^2 \Rightarrow (p + q\omega + r\omega^2)^2 + (p + q\omega^2 + r\omega^4)^2$
$= (p + q\omega + r\omega^2)^2 + (p + q\omega^2 + r\omega)^2$
$= p^2 + q^2\omega^2 + r^2\omega^4 + 2pq\omega + 2qr\omega^3 + 2pr\omega^2 + p^2 + q^2\omega^4 + r^2\omega^2 + 2pq\omega^2 + 2pr\omega^3 + 2pr\omega$
$= 2p^2 + q^2(\omega^2 + \omega) + r^2(\omega + \omega^2) + 2pq(\omega + \omega^2) + 2qr(\omega^3 + \omega^3) + 2pr(\omega + \omega^2)$
$= 2p^2 + (q^2 + r^2)(\omega + \omega^2) + 2p(\omega + \omega^2)(q + r) + 2qr \times 2$
$= 2p^2 - (q + r)^2 + 2qr + 2p + 2p(-1)(-p) + 4qr$
$= 2p^2 - (-p)^2 + 6qr + 2p^2 = 4p^2 - p^2 + 6qr = 3p^2 + 6qr$
$= 3(p^2 + 2qr) = R.H.S$ (**Proved.**)

05. উদ্দীপক-২: $(y + ix)^{\frac{1}{3}} = a + ib$ একটি সমীকরণ। [BB'22]
(গ) উদ্দীপক-২ এর সাহায্যে দেখাও যে, $ax + by = 4ab(a^2 - b^2)$. 4

সমাধান

গ. $(y + ix)^{\frac{1}{3}} = a + ib \therefore y + ix = (a + ib)^3$
$= a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + (bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + 3a^2bi - b^3i$
$= a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i \therefore y = a^3 - 3ab^2; x = 3a^2b - b^3$
$\therefore ax + by = 3a^3b - ab^3 + a^3b - 3ab^3 = 4a^3b - 4ab^3 = 4ab(a^2 - b^2)$(**Showed**)

06. $z_1 = 1 + ix, z_2 = a + ib$ এবং $z_3 = x + iy$ তিনটি জটিল সংখ্যা। [MB'22]
(খ) $|z_2|^2 = 1$ হলে, দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{\overline{z_1}}{z_1} = \overline{z_2}$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে। 4
(গ) $\sqrt[3]{z_2} = z_3$ হলে প্রমাণ কর যে, $|z_3| = \sqrt{\frac{b}{2y} - \frac{a}{2x}}$. 4

সমাধান

খ. $z_1 = 1 + ix, z_2 = a + ib$
দেওয়া আছে, $|z_2|^2 = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1 \therefore b^2 = 1 - a^2 = -(a^2 - 1)$
প্রশ্নমতে, $\frac{\overline{z_1}}{z_1} = \overline{z_2} \Rightarrow \frac{1-ix}{1+ix} = a - ib \Rightarrow \frac{1-ix+1+ix}{1-ix-1-ix} = \frac{a-ib+1}{a-ib-1} \Rightarrow \frac{2}{-2ix} = \frac{a-ib+1}{a-ib-1}$
$\Rightarrow -ix = \frac{a-ib-1}{a-ib+1} \Rightarrow i^2x = \frac{a-ib-1}{ai-i^2b+i} \Rightarrow x = \frac{a-ib-1}{ai+b+i} = \frac{(a-1)-ib}{b+(a+1)i}$
$= \frac{\{(a-1)-ib\}\{b-(a+1)i\}}{\{b+(a+1)i\}\{b-(a+1)i\}} = \frac{ab-b-ib^2-(a^2-1)i+(ab+b)i^2}{b^2-(a+1)^2i^2} = \frac{ab-b-ib^2+b^2i-ab-b}{b^2+(a+1)^2} = \frac{-2b}{b^2+a^2+2a+1} = \frac{-2b}{2a+2} = -\frac{b}{a+1}$
অর্থাৎ, $x = -\frac{b}{a+1}$; যা একটি বাস্তব সমাধান । তাই, x এর একটি বাস্তব মান উক্ত সমীকরণ সিদ্ধ করে।

গ. $z_2 = a + ib, z_3 = x + iy$

প্রশ্নমতে, $\sqrt[3]{z_2} = z_3 \Rightarrow z_2 = (z_3)^3 \Rightarrow a + ib = (x + iy)^3 = x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + 3xy^2i^2 + y^3i^3$

$x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i$

$\therefore a = x^3 - 3xy^2 \therefore b = 3x^2y - y^3 \therefore \frac{b}{2y} - \frac{a}{2x} = \frac{3x^2y-y^3}{2y} - \frac{x^3-3xy^2}{2x}$

$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 = x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (|x + iy|)^2 = (|z_3|)^2 \therefore |z_3| = \sqrt{\frac{b}{2y} - \frac{a}{2x}}$ **(Proved.)**

07. দৃশ্যকল্প-২: $2x = -1 + \sqrt{-3}$ এবং $2y = -1 - \sqrt{-3}$ **[RB'19]**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর আলোকে প্রমাণ কর, $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = -1$. **4**

সমাধান

গ. $2x = -1 + \sqrt{-3} \Rightarrow x = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \therefore x = \omega$

$2y = -1 - \sqrt{-3} \Rightarrow y = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} \therefore y = \omega^2$

$L.H.S. = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = \omega^4 + \omega^3.\omega^2 + \omega^2.(\omega^2)^2 + \omega.(\omega^2)^3 + (\omega)^4$

$= \omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2 = -1 = R.H.S.$

$\therefore L.H.S. = R.H.S \therefore x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^2 + y^4 = -1$ **[Proved]**

08. দৃশ্যকল্প-২: $y^2 + y + 1 = 0.$ **[SB'19]**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ এর সমীকরণটির মূলদ্বয় p, q হলে, দেখাও যে,

$$p^m + q^m = \begin{cases} 2, \text{যখন } m \text{ এর মান এর মান } 3 \text{ দ্বারা বিভাজ্য} \\ -1, \text{যখন } m \text{ অপর কোনো পূর্ণ সংখ্যা} \end{cases}$$ **4**

সমাধান

গ. $y^2 + y + 1 = 0 \therefore y = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2} \therefore p = \omega$ এবং $q = \omega^2$

m, 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে, এখন, $m = 3n$ হলে, $\omega^{3n} + (\omega^2)^{3n} = (\omega^3)^n + (\omega^3)^{2n} = 1 + 1 = 2$

m, 3 দ্বারা বিভাজ্য না হলে,

$m = 3n + 1$ হলে, $\omega^{3n+1} + (\omega^2)^{3n+1} = (\omega^3)^n.\omega + (\omega^3)^{2n}.\omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$

$m = 3n + 2$ হলে, $\omega^{3n+2} + (\omega^2)^{3n+2} = (\omega^3)^n.\omega^2 + (\omega^3)^{2n}.\omega^4 = \omega^2 + \omega = -1$

$$\therefore p^m + q^m = \begin{cases} 2, \text{যখন } m \text{ এর মান এর মান } 3 \text{ দ্বারা বিভাজ্য} \\ -1, \text{যখন } m \text{ অপর কোনো পূর্ণ সংখ্যা} \end{cases}$$ [দেখানো হলো]

09. দৃশ্যকল্প-১: $p(x) = a + bx + cx^2$ **[BB'19]**

(খ) দৃশ্যকল্প-১ এর সাহায্যে যদি $\{p(\omega)\}^3 + \left\{p\left(\frac{1}{\omega}\right)\right\}^3 = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $a = \frac{1}{2}(b + c)$ অথবা $c = \frac{1}{2}(a + b)$. **4**

সমাধান

খ. এখানে, $\{p(\omega)\}^3 = \{a + b\omega + c\omega^2\}^3$

$\left\{p\left(\frac{1}{\omega}\right)\right\}^3 = \left(a + \frac{b}{\omega} + \frac{c}{\omega^2}\right)^3 = (a\omega^2 + b\omega + c)^3 \quad [\omega^6 = 1]$

প্রশ্নমতে, $(a + b\omega + c\omega^2)^3 + (a\omega^2 + b\omega + c)^3 = 0$

$\Rightarrow -\frac{a+b\omega+c\omega^2}{a\omega^2+b\omega+c} = 1, \omega, \omega^2$; 1 হলে, $-a - b\omega - c\omega^2 = a\omega^2 + b\omega + c$

$\Rightarrow a(1 + \omega^2) + 2b\omega + c(1 + \omega^2) = 0 \Rightarrow -a\omega + 2b\omega - c\omega = 0 \Rightarrow 2b = c + a \therefore b = \frac{c+a}{2}$

ω হলে, $-a - b\omega - c\omega^2 = a + b\omega^2 + c\omega \therefore \boxed{a = \frac{b+c}{2}}$

ω^2 হলে, $-a - b\omega - c\omega^2 = a\omega + b + c\omega^2 \therefore \boxed{c = \frac{a+b}{2}}$ **[Proved]**

10. (ক) $x + iy = \sqrt{\frac{p+iq}{r+is}}$ হলে দেখাও যে, $(x^2 + y^2)^2 = \frac{p^2+q^2}{r^2+s^2}$ **[SB'17]**

সমাধান

ক. $x + iy$ এর জটিল অনুবন্ধী, $x - iy$ $\therefore x - iy = \sqrt{\frac{p-iq}{r-is}}$

$\therefore (x+iy)(x-iy) = \sqrt{\frac{p+iq}{r+is}}\sqrt{\frac{p-iq}{r-is}} \Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{p^2-i^2q^2}{r^2-i^2s^2}}$ $[\because i^2 = -1]$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{p^2+q^2}{r^2+s^2}}$ $\therefore (x^2+y^2)^2 = \frac{p^2+q^2}{r^2+s^2}$ (দেখানো হল)

11. $g(x) = p + qx + rx^2$ **[BB'17]**

(গ) $p + q + r = 0$ হলে প্রমাণ কর যে, $\{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 = a^x pqr$ যেখানে ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল এবং $a = x = 3$. **4**

সমাধান

গ. দেওয়া আছে, $g(x) = p + qx + rx^2$

$\therefore g(\omega) = p + q\omega + r\omega^2$ এবং $g(\omega^2) = p + q\omega^2 + r\omega^4 = p + q\omega^2 + r\omega[\omega^3 = 1]$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 \Rightarrow (p + q\omega + r\omega^2)^3 + (p + q\omega^2 + r\omega)^3$

ধরি, $p + q\omega + r\omega^2 = x$ এবং $p + q\omega^2 + r\omega = y$

বামপক্ষ $= x^3 + y^3$

$= (x+y)(x^2 - xy + y^2) = (x+y)\{x^2 + (-1)xy + y^2\}$

$= (x+y)\{x^2 + (\omega^2+\omega)xy + y^2\}[\because \omega^2 + \omega + 1 = 0]$

$= (x+y)(x^2 + \omega^2 xy + \omega xy + y^2) = (x+y)(x^2 + \omega xy + \omega^2 xy + y^2)$

$= (x+y)\left\{x(x+\omega y) + \omega^2 y\left(x + \frac{y}{\omega^2}\right)\right\} = (x+y)\left\{x(x+\omega y) + \omega^2 y\left(x + \frac{y}{\omega^2}\right)\right\}$

$= (x+y)\{x(x+\omega y) + \omega^2 y(x+\omega y)\}$ $[\because \omega^3 = 1 \therefore \omega = \frac{1}{\omega^2}]$

$= (x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y)$

$\therefore x + y = p + q\omega + r\omega^2 + p + q\omega^2 + r\omega$

$= 2p + q(\omega + \omega^2) + r(\omega^2 + \omega) = 2p - q - r$

আবার, $x + \omega y = p + q\omega + r\omega^2 + p\omega + q\omega^3 + r\omega^2$

$= p(1+\omega) + q(\omega+1) + 2r\omega^2$

$= \omega^2(2r - p - q)$

আবার, $x + \omega^2 y = p + q\omega + r\omega^2 + p\omega^2 + q\omega^4 + r\omega^3$

$= p + q\omega + r\omega^2 + p\omega^2 + q\omega + r$

$= p(1+\omega^2) + 2q\omega + r(1+\omega^2) = p(-\omega) + 2q\omega + r(-\omega) = \omega(2q - p - r)$

$\therefore (x+y)(x+\omega y)(x+\omega^2 y) = (2p - q - r)\omega^2(2r - p - q)\omega(2q - p - r)$

$= \omega^3(2p - q - r)(2r - p - q)(2q - p - r)$

$= \{2p - (q+r)\}\{2r - (p+q)\}\{2q - (p+r)\}$

$= \{2p - (-p)\}\{2r - (-r)\}\{2q - (-q)\}[\because p + q + r = 0]$

$= 3p.3r.3q = 3^3 pqr = a^x pqr$ $[\because a = x = 3]$ = ডানপক্ষ

$\therefore \{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 = a^x pqr$ (প্রমাণিত)।

Type-08: এককের ঘনমূল সংক্রান্ত

Concept:

- $\sqrt[3]{1} = 1, \omega, \omega^2$ যেখানে, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$
- $1 + \omega + \omega^2 = 0; \omega^3 = 1$

MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. $\sqrt[3]{1}$ এর মূলত্রয়ের– **[Ctg.B'22] [Ans: d]**

(i) যোগফল শূন্য (ii) দুইটি জটিল

(iii) একটি মূল অপর একটি মূলের বর্গের সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

(a) i, ii (b) i, iii

(c) ii, iii (d) i, ii, iii

নিচের তথ্যের আলোকে পরবর্তী প্রশ্নের উত্তর দাও:

$x = \sqrt[3]{1}$ একটি সমীকরণ।

02. সমীকরণের মূলগুলোর গুণফল- **[Din.B'22]**

(a) -1 (b) 0

(c) 1 (d) $1 + i$

সমাধান: (c); $1.\omega.\omega^2 = \omega^3 = 1$

CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. দৃশ্যকল্প-২: এককের একটি কাল্পনিক ঘন মূল ω। **[BB'19]**

(গ) দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $1 + \omega + \omega^2 = 0$. **4**

সমাধান

গ. এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω

ধরি, $x = \sqrt[3]{1} \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$

হয় $x = 1$

অথবা, $x = \frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2.1} = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

তাহলে, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$; $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

এখন, $L.H.S. = 1 + \omega + \omega^2 = 1 + \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = 1 - \frac{2}{2} = 0 = R.H.S$ [**Proved**]

Type-09: জটিল সংখ্যার জ্যামিতিক প্রয়োগ সংক্রান্ত

Concept:

- কোন জটিল সংখ্যা $\mathbf{z = x + iy}$ এর জন্য,

(i) $|z + a| = |z + b|$ সরলরেখা নির্দেশ করে।

(ii) $|z + a| = k$ বৃত্ত নির্দেশ করে।

(iii) $|az + k_1| = |bz + k_2|$ বৃত্ত নির্দেশ করে।

(iv) $\left|\frac{z+a}{z+b}\right| = k$; $k = 1$ হলে সরলরেখা নির্দেশ করে। $k \neq 1$ হলে বৃত্ত নির্দেশ করে এবং $|z + a| = |z + b|$ (বৃত্ত)

(v) $z\bar{z} = 0$ বিন্দু বৃত্ত নির্দেশ করে।

(vi) $|z - a| + |z - b| = k$; $|a - b| < k$ হলে উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

(vii) $||z - a| - |z - b|| = k$; $|a - b| > k$ হলে অধিবৃত্ত নির্দেশ করে। [যেখানে a, b, k বাস্তব ধ্রুব সংখ্যা]

MCQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. $z = x + iy$ হলে, $|z| = 5$ সমীকরণটি প্রকাশ করে- **[JB'22]**
(a) সরলরেখা (b) বৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) উপবৃত্ত
সমাধান: (b); $|z| = 5 \Rightarrow |x + iy| = 5$
$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$

02. $z = x + iy$ হলে $|z - 1| = 5$ সমীকরণটি কী নির্দেশ করে? **[CB'22]**
(a) সরলরেখা (b) বৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) উপবৃত্ত
সমাধান: (b); $|z - 1| = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 5$
$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 25$ একটি বৃত্ত নির্দেশ করে।

03. $z = 2x + i.3y$; x ও y বাস্তব সংখ্যা হলে $|z| = 1$ দ্বারা কি নির্দেশিত হয়? **[DB'19]**
(a) বৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত
সমাধান: (b); $|z| = 1 \Rightarrow |2x + i3y| = 1$
$\Rightarrow \sqrt{(2x)^2 + (3y)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{9}} = 1$

04. $z = x + iy$ হলে, $z\bar{z} = 1$ সমীকরণের জ্যামিতিক রূপ কোনটি? **[CB'19]**
(a) অধিবৃত্ত (b) বৃত্ত
(c) উপবৃত্ত (d) পরাবৃত্ত
সমাধান: (b); $z\bar{z} = |z|^2 = 1 \therefore x^2 + y^2 = 1$

05. $z = x + iy$; x ও y বাস্তব সংখ্যা হলে $|z|^2 = 1$ দ্বারা কি নির্দেশিত হয়? **[Ctg.B'17]**
(a) উপবৃত্ত (b) বৃত্ত
(c) পরাবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত
সমাধান: (b); $z = x + iy \therefore |z|^2 = 1$
$\therefore |x + iy|^2 = 1 \therefore \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = 1$
$\therefore x^2 + y^2 = 1$ যা বৃত্ত।

CQ প্রশ্ন ও সমাধান

01. উদ্দীপকে: $z = x + iy$ **[DB'22]**
(গ) $3|z - 1| = 2|z - 2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

গ. দেওয়া আছে, $z = x + iy$
প্রশ্নমতে, $3|z - 1| = 2|z - 2| \Rightarrow 3|x + iy - 1| = 2|x + iy - 2|$
$\Rightarrow 3|(x-1) + iy| = 2|x + iy - 2| \Rightarrow 3\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + y^2}$
$\Rightarrow 9(x^2 - 2x + 1) + 9y^2 = 4(x^2 - 4x + 4) + 4y^2$
$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 18x + 16x + 9 - 16 = 0 \Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 2x - 7 = 0$
এখানে, x^2 ও y^2 এর সহগদ্বয় পরস্পর সমান এবং xy যুক্ত পদ অনুপস্থিত। তাই ইহা একটি বৃত্ত নির্দেশ করে।

02. দৃশ্যকল্প-১: $|z + 6| + |z - 6| = 20$ যেখানে $z = x + iy$. **[Ctg.B'22]**
(খ) দৃশ্যকল্প-১ দ্বারা নির্দেশিত সমীকরণটির সঞ্চারপথ এবং উহার নাম উল্লেখ করে চিত্র অংকন কর। **4**

সমাধান

খ. প্রশ্নমতে, $|z + 6| + |z - 6| = 20 \Rightarrow |(x+6) + iy| + |(x-6) + iy| = 20$
$\Rightarrow \sqrt{(x+6) + y^2} + \sqrt{(x-6)^2 + y^2} = 20 \Rightarrow \sqrt{(x+6)^2 + y^2} - 20 = -\sqrt{(x-6)^2 + y^2}$
$\Rightarrow x^2 + 12x + 36 + y^2 + 400 - 40\sqrt{(x+6)^2 + y^2} = x^2 - 12x + 36 + y^2$
$\Rightarrow 24x + 400 = 40\sqrt{(x+6)^2 + y^2} \Rightarrow (24x + 400)^2 = 1600(x^2 + 12x + 36 + y^2)$
$\Rightarrow 576x^2 + 19200x + 160000 = 1600x^2 + 19200x + 57600 + 1600y^2$
$\Rightarrow 9x^2 + 300x + 2500 = 25x^2 + 300x + 900 + 25y^2 \Rightarrow 16x^2 + 25y^2 = 1600$
$\Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ ইহা একটি উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

03. $z = x + iy$ একটি জটিল রাশি। **[SB'22]**

(খ) $|z+3| = 4$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

খ. $|z+3| = 4 \Rightarrow |x+iy+3| = 4 \Rightarrow |(x+3)+iy| = 4$

$= \sqrt{(x+3)^2+y^2} = 4 \Rightarrow (x+3)^2+y^2 = 42$

$\therefore$ বৃত্তের কেন্দ্র $(-3, 0)$ ও ব্যাসার্ধ 4 একক।

04. $|z+2| + |z-2| = 6,\ z = x+iy$ একটি কনিক। **[BB'22]**

(গ) কনিকটির অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

গ. $|z+2|+|z-2| = 6 \Rightarrow |x+iy+2|+|x+iy-2| = 6 \Rightarrow |(x+2)+iy|+|(x-2)+iy| = 6$

$\Rightarrow \sqrt{(x+2)+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 6 \Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}-6 = -\sqrt{(x-2)+y^2}$

$\Rightarrow x^2+4x+4+y^2-2\sqrt{(x+2)^2+y^2}\cdot 6+36 = x^2-4x+4+y^2$

$\Rightarrow 8x+36 = 12\sqrt{(x+2)^2+y^2} \Rightarrow 2x+9 = 3\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Rightarrow (2x+9)^2 = 9(x^2+4x+4+y^2) \Rightarrow 4x^2+36x+81 = 9x^2+36x+36+9y^2$

$\Rightarrow 5x^2+9y^2 = 81-36 = 45 \Rightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5} = 1$

ইহা একটি উপবৃত্ত; যার ক্ষেত্রে $a = 3$ ও $b = \sqrt{5}$

$\therefore$ অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $2a = 6$ ও $2b = 2\sqrt{5}$ একক।

05. $f(x) = x-2$. **[SB'19]**

(গ) $z = p+iq$ হলে, $|f(z+6)|+|f(z-2)| = 10$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চার পথের সমীকরণ নির্ণয় কর। **4**

সমাধান

গ. $|f(z+6)|+|f(z-2)| = 10 \ \Rightarrow |z+6-2|+|z-2-2| = 10$

$\Rightarrow |p+iq+4|+|p+iq-4| = 10$

$\Rightarrow \sqrt{(p+4)^2+q^2} + \sqrt{(p-4)^2+q^2} = 10$

$\Rightarrow (p+4)^2+q^2+100-2.10\sqrt{(p+4)^2+q^2} = (p-4)^2+q^2$

$\Rightarrow 4.p.4+100 = 20\sqrt{(p+4)^2+q^2}$

$\Rightarrow (16p+100)^2 = 400\{p^2+q^2+8p+16\}$

$\Rightarrow 256p^2+10000+3200p = 400p^2+400q^2+3200p+6400$

$\Rightarrow 400q^2-144p^2 = 3600 = \frac{q^2}{9}-\frac{p^2}{25} = 1$

$\therefore \frac{q^2}{3^2}-\frac{p^2}{5^2} = 1$; অর্থাৎ অধিবৃত্তের সমীকরণ।

06. (ক) $z = x+iy$ হলে, $|z+i| = |\bar{z}+2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। **[JB'17]**

সমাধান

ক. দেওয়া আছে, $z = x+iy \therefore |z+i| = |\bar{z}+2| \Rightarrow |x+iy+i| = |\overline{x+iy}+2|$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2+y^2} \ \Rightarrow x^2+(y+1)^2 = (x+2)^2+y^2$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2+y^2+2y+1 = x^2+4x+4+y^2 \Rightarrow 4x-2y+3 = 0$ যা সরলরেখার সঞ্চারপথ।